PROBABILITÉS

I. ÉVÉNEMENT

« EXPÉRIENCE ALÉATOIRE »

On appelle « expérience aléatoire » un dispositif comprenant l'intervention du *hasard*. En gros, tout ce qui peut se raconter en terme de tirage au sort : jet de dé, lancer de pièce, tirage d'une boule « à l'aveugle » dans une urne, etc.

ÉVENTUALITÉ

Chaque résultat possible d'une « expérience aléatoire » peut se nommer : **résultat** ; **cas** ; **possibilité** ; **cas possible** ; **éventualité** ; **issue**. Ces termes sont tous considérés comme synonymes.

UNIVERS

L'*ensemble* de <u>toutes</u> les *issues* se nomme pompeusement **univers** (ou « univers des possibles »). On le note souvent Ω (« oméga »).

Par exemple, si on lance une pièce de monnaie, on pourra poser : $\Omega = \{P;F\}$. Où « P » représente Pile et « F » Face.
Si l'on jette un dé cubique classique, on pourra poser : $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$, où chaque élément de Ω représente le numéro de la face supérieure.

ÉVÉNEMENT

Lorsqu'on s'intéresse au résultat d'une expérience aléatoire, on ne considère pas toujours les éventualités isolément. On pourra par exemple se demander la probabilité pour qu'un dé « tombe sur un

numéro pair ». Si on a distingué 6 cas en posant : $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$, l'affirmation « le dé tombe sur un numéro pair » décrit le regroupement de 3 cas. En termes ensemblistes, on l'écrit : $\{2;4;6\}$. C'est cela qu'on appelle un **événement** :

> Un **événement** est un <u>ensemble</u> d'éventualités.

Il faut faire l'effort de distinguer le mot *événement*, des mots *éventualité*, *issue*, *cas*, etc. Cette distinction pourra à juste titre vous sembler artificielle, car après tout, on aurait pu, sans faire injure à leurs sens courants, permuter les significations mathématiques des mots « événement » et « éventualité ».

Chaque événement peut être décrit *en compréhension*, c'est-à-dire par une affirmation portant sur le résultat de l'expérience aléatoire ou *en extension*, par la 'liste' des éventualités qu'il contient[1]. Par exemple, en reprenant le lancer d'un dé cubique, avec $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$, on a :

En compréhension	En extension
A : « Il sort un numéro pair »	$A = \{2;4;6\}$
B : « Il sort un numéro strictement inférieur à 3 »	$B = \{1;2\}$

Il est recommandé de réviser le chapitre sur les ensembles.

[1] Pour qu'on puisse décrire un événement en extension, il faut qu'il ne contienne qu'un nombre fini d'éléments.

II. Opérations

Reprenons l'exemple précédent du dé, avec les deux événements A et B du paragraphe précédent.

Et L'événement « A **et** B » peut alors se formuler : « Il sort un numéro qui est à la fois pair et strictement inférieur à 3 ». Dans l'exemple qui nous occupe, il n'y a en fait qu'une seule possibilité pour que cet événement advienne : il faut que le numéro qui sorte soit le 2.
En extension, l'événement s'écrit donc : $\{2\}$
D'un point de vue ensembliste, c'est $\boxed{A \cap B}$ (« *A inter B* »)

Ou L'événement « A **ou** B » peut se formuler : « il sort un numéro qui est inférieur strictement à 3 ou pair (ou les deux) ».
Il s'écrit en extension : $\{1;2;4;6\}$.
C'est en fait $\boxed{A \cup B}$. (« *A union B* »)

Non L'événement **contraire** de A, dit « **non** A », qui peut ici se formuler : « il sort un numéro impair », s'écrit en extension : $\{1;3;5\}$.
C'est en fait $\Omega \setminus A$ (« oméga privé de A »). On parle aussi du *complémentaire* de A (dans Ω), que l'on peut noter (la référence à Ω étant implicite) : $\boxed{\overline{A}}$ (« *non B* » ou « *complémentaire de B*).

Incompatibilité

Deux événement E et F sont dits **incompatibles** s'ils ne peuvent en aucun cas être tous deux réalisés. En termes ensemblistes, cela revient à dire qu'ils sont **disjoints**, c'est-à-dire que $E \cap F = \varnothing$. (L'incompatibilité n'est pas une *opération*, mais une *relation*.)

III. Loi de probabilité

Principe Définir une *loi de probabilité* sur un univers, c'est associer à chaque *événement* une probabilité, qui est représentée par un nombre appartenant à l'intervalle $[0;1]$:
« Une chance sur deux » sera représenté par le nombre $\frac{1}{2}$.
« 75% des chances sera représenté par le rapport $\frac{75}{100}$, qui n'est autre que le nombre réel $0{,}75$.

Définition Soit Ω un ensemble non vide. Soit P une fonction qui, à chaque *événement* associe un réel. P est appelée **loi de probabilité** lorsqu'elle vérifie les trois propriétés suivantes :

- Pour tout événement A : $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\Omega) = 1$
- Quels que soient les événements A et B : si $A \cap B = \varnothing$ alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (additivité)

IV. Probabilités finies

Principe Lorsque le nombre de cas possibles est fini, on peut considérer isolément la probabilité de chaque éventualité. La probabilité d'un événement s'obtient alors en additionnant les probabilités de chacune des *éventualités* qui le composent.

PRÉAMBULE Considérons un univers Ω fini et une loi de probabilité P sur cet univers. Soit E un événement de Ω. En posant n = Card(Ω) et p = Card(E), on peut noter e_1 ; e_2 ; … ; e_n les éventualités, de façon que $E=\{e_1;e_2;...;e_p\}$, avec bien entendu : $\Omega=\{e_1;e_2;...;e_n\}$. On écrira $P(e_1)$ pour signifier $P(\{e_1\})$.

THÉORÈME La probabilité d'un événement est la somme des probabilités de chacune de ses éventualités : $P(E)=P(e_1)+P(e_2)+...+P(e_p)$.

V. ÉQUIPROBABILITÉ

DÉFINITION

Lorsque toutes les éventualités ont la même probabilité d'advenir, on parle d'**équiprobabilité** : $P(e_1)=P(e_2)=...=P(e_n)$.

THÉORÈME En situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement est le rapport du « nombre de cas favorables sur le nombre de cas possibles » : $\boxed{P(E)=\dfrac{Card(E)}{Card(\Omega)}}$

VI. THÉORÈMES

THÉORÈMES Quels que soient les événements A et B :

- Si $A\subset B$ alors $P(B\setminus A)=P(B)-P(A)$ (1)
- $\boxed{P(\overline{A})=1-P(A)}$ (2)
- $\boxed{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$ (3)

COROLLAIRE

De (2), il vient que $\boxed{P(\varnothing)=0}$

VII. SIMULATION

Nous n'utiliserons que la fonction enAléat(,), qui se trouve dans le menu (math)/PRB, (PRB pour PRoBabilités) :

entAléat(*valeur minimale* , *valeur maximale*)

Cette fonction tire au sort un entier. Par exemple entAléat(1 , 6) tire au sort un entier entre 1 et 6 (inclus). Comme un dé, quoi. Si l'on tape « entAléat(1 , 6) (entrer)(entrer)(entrer) », on obtient trois entiers successifs :

On peut bien entendu inclure cette fonction dans un programme.

VIII. ARBRES

ÉPREUVES Lorsqu'une expérience aléatoire est constituée de plusieurs tirages au sort, chacun de ces tirages au sort s'appelle une **épreuve**.

URNES Un exemple couramment utilisé est celui de tirages dans une urne. On considère une *urne* (un récipient opaque, disons), dans laquelle se trouvent des boules de couleurs différentes, mais de même taille,

« indiscernables au toucher », façon de dire qu'elles ont toutes la même chance d'être tirée.

Nous allons nous intéresser au cas où l'on effectue deux tirages successifs « **sans remise** » : on tire une première boule, puis une seconde, sans avoir remis la première dans l'urne. Ainsi, les conditions du second tirage dépendent du résultat du premier.

Étude d'un exemple

Une urne contient deux boules blanches et trois boules noires. On tire deux boules successivement, *sans remise*.

<u>Cherchons la probabilité pour que la première boule tirée soit blanche et que la seconde soit noire</u>.

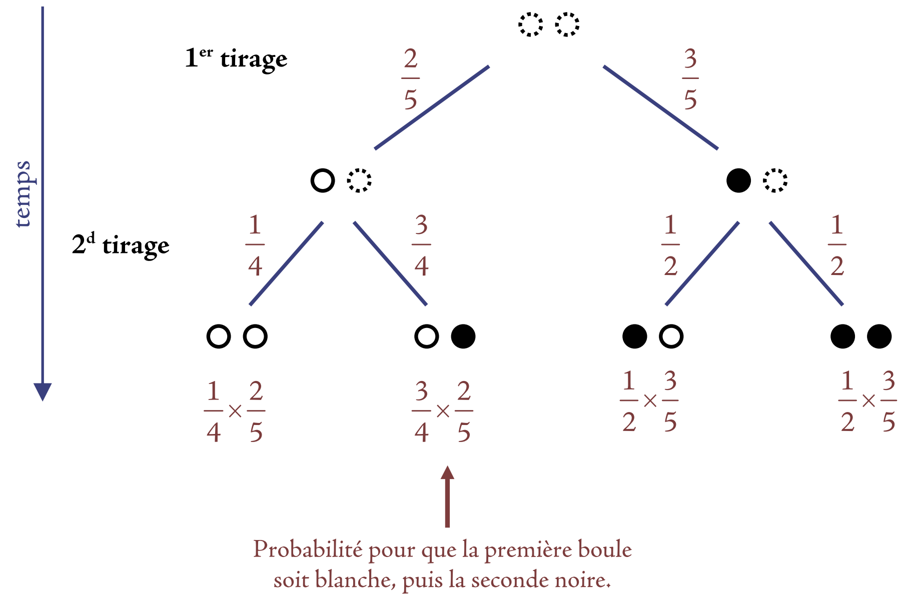
La probabilité que la première boule tirée soit blanche est de $\frac{2}{5}$.

Et si la première boule tirée est blanche, alors il reste ensuite dans l'urne une blanche et trois noires :

La probabilité que la deuxième boule tirée soit noire <u>sachant que la première est blanche</u> est de $\frac{3}{4}$.

La première boule tirée sera blanche <u>et</u> la seconde noire, dans $\frac{3}{4}$ <u>de</u> $\frac{2}{5}$ des cas. Or $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{5}$, c'est $\frac{3}{4}$ fois $\frac{2}{5}$. Il faut donc <u>multiplier</u> les probabilités des branches de l'arbre qui mènent au cas considéré.

La probabilité pour que la première boule tirée soit blanche et que la seconde soit noire est donc de $\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}$.



On raisonne de la même façon pour chaque « feuille » de l'arbre.